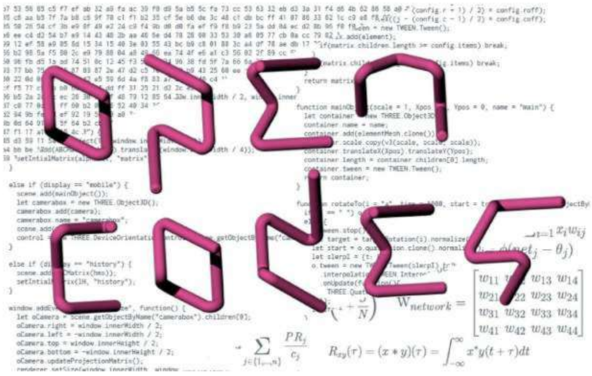
[(/de)](/de)

Ausstellungen & Veranstaltungen (/de/ausstellungen-veranstaltungen) /
Veranstaltungen (/de/ausstellungen-veranstaltungen/aktuelle-veranstaltungen) /
Wäre die Computergeschichte anders verlaufen wenn das bekannt gewesen wäre?

Wäre die Computergeschichte anders verlaufen wenn das bekannt gewesen wäre?

Dipl.-Math. Wolfgang Hinderer
www.hinderer-ka.de

Fr, 18.05.2018
14:00, Dauer: 4h



OpenHUB, Lichthof 8+9 (/de/standort/openhub-lichthof-89)
Eintritt frei

Es geht um den Kreuzschalter, in der Elektrotechnik bekannt. In der Eisenbahntechnik heißt er Doppelkreuzungsweiche. Hintereinander geschaltet kennen wir den Kreuzschalter z.B. von der Treppenhausbeleuchtung. Doch kaum zu glauben: Neben der Hintereinander-Schaltung gibt es auch die Parallel-Schaltung, die bislang nicht bekannt war.

Das führt auf eine neue Computerlogik, die nicht auf den Grundoperationen AND, OR und NOT einer booleschen Algebra, sondern auf den Grundoperationen eines booleschen Ringes, AND und EXOR, beruht. Boolesche Algebra und boolescher Ring sind völlig äquivalent - nur dass Letzterer wesentlich angenehmere mathematische Eigenschaften hat.

Neu ist, dass es nun, im Prinzip, zum mathematischen Modell auch die Hardware gibt: Die Verschaltung von Kreuzschaltern, hintereinander und parallel, setzt genau die logischen Operationen im booleschen Ring, und den Mechanismus der Substitution, 1:1 in Hardware um. Ein bereits existierendes Kreuzschalternetz-Modell kann ausprobiert werden.

Folie 1

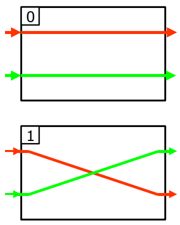
Wäre die Computergeschichte anders verlaufen wenn *das* bekannt gewesen wäre?

W. Hinderer

- Kreuzschalter
- boolesche Algebra und boolesche Ringe
- eine neue Computerlogik
- Supplement: ein boolescher Tischrechner

Folie 2

Kreuzschalter



Es geht in diesem Workshop um den Kreuzschalter.

Ein Kreuzschalter hat zwei Eingänge, zwei Ausgänge und zwei Zustände.

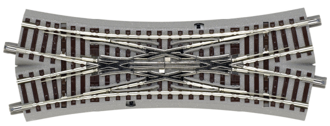
Beim Zustand "0" werden die beiden Eingänge parallel zu den beiden Ausgängen geführt,

beim Zustand "1" werden die beiden Eingänge überkreuz zu den beiden Ausgängen geführt.

Als ich ungefähr 8 Jahre alt war, Anfang der 50er Jahre, bekam ich von einem Freund der Familie, der Dipl.-Ingenieur war, so ein Ding geschenkt, damit ich am Elektromotor meines Trix-Metallbaukastens einfach die Richtung umschalten konnte.

Folie 3

Kreuzschalter



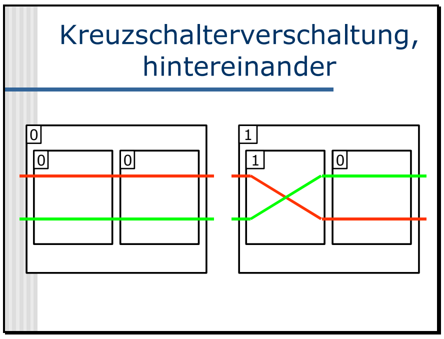
Auch die Doppelkreuzungsweiche bei der (Modell-) Eisenbahn ist so ein Kreuzschalter.

(https://www.google.de/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fasset.re-in.de%2Fisa%2F160267%2Fc1%2F-%2Fde%2F244858_BB_02_FB%2FRoco-H0-geoLINE-mit-Bettung-61164-Doppelkreuzungsweiche.jpg%3Fy%3D525%26align%3Dcenter&imgrefurl=https%3A%2F%2Fwww.voelkner.de%2Fproducts%2F116953%2FRoco-H0-geoLINE-mit-Bettung-61164-Doppelkreuzungsweiche.html&docid=RO68kiHYx6UfAM&tbnid=x9-juB6tcM4LBM%3A&vet=10ahUKEwj9r5i7lbjaAhXFFJoKHd-RAp4QMwg_KAIwAg..i&w=1487&h=525&bih=557&biw=1153&q=doppelkreuzungsweiche&ved=0ahUKEwj9r5i7lbjaAhXFFJoKHd-RAp4QMwg_KAIwAg&iact=mrc&uact=8)

Folie 4

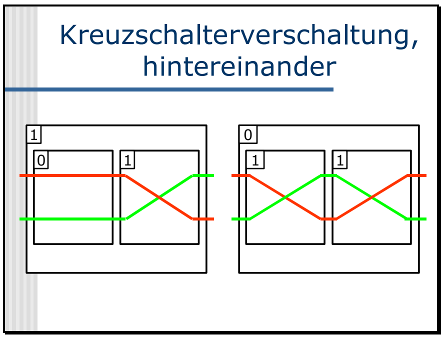
Bild aus dem Frankfurter Hauptbahnhof
(https://www.google.de/imgres?imgurl=https%3A%2F%2Fupload.wikimedia.org%2Fwikipedia%2Fcommons%2Fthumb%2F2%2F26%2FSunsetTracksCrop.JPG%2F220px-SunsetTracksCrop.JPG&imgrefurl=https%3A%2F%2Fde.wikipedia.org%2Fwiki%2FWeiche_(Bahn)&docid=_XkxLQMdWDuWcM&tbnid=kEH6ln31XyBJAM%3A&vet=10ahUKEwj9r5i7lbjaAhXFFJoKHd-RAp4QMwibAShRMFE..i&w=220&h=181&bih=557&biw=1153&q=doppelkreuzungsweiche&ved=0ahUKEwj9r5i7lbjaAhXFFJoKHd-RAp4QMwibAShRMFE&iact=mrc&uact=8#h=181&imgdii=kEH6ln31XyBJAM:&vet=10ahUKEwj9r5i7lbjaAhXFFJoKHd-RAp4QMwibAShRMFE..i&w=220)

Folie 5



Man kann zwei Kreuzschalter hintereinander schalten und einen Kasten drum herum machen: Das ist wieder ein Kreuzschalter, bei dem die beiden Eingänge entweder parallel oder überkreuz nach draußen geführt werden.

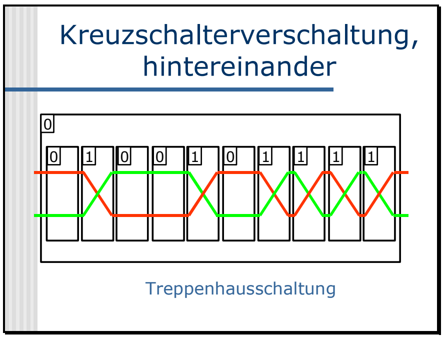
Folie 6



Der umfassende Kreuzschalter hat wie die innen liegenden Kreuzschalter einen Zustand: 0 oder 1, abhängig von den inneren Zuständen.

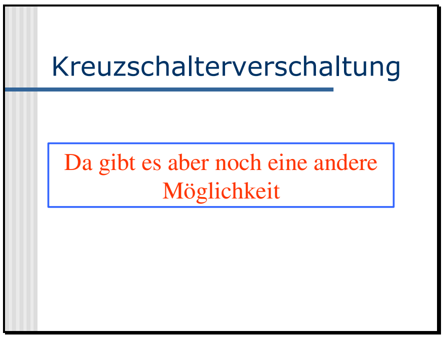
Die Farben dienen der Verdeutlichung des Flusses.

Folie 7

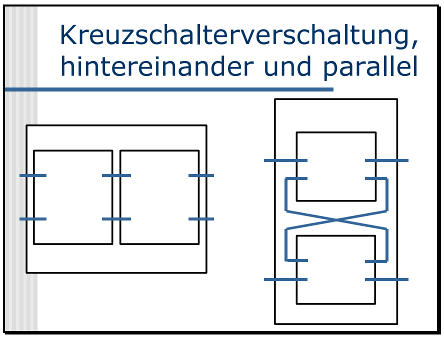


Treppenhausschaltung: Man kann auch viele Kreuzschalter hintereinander schalten. Das Resultat ist davon abhängig ob die Anzahl der Überkreuzungen (der "1"en) gerade (Resultat 0) oder ungerade (Resultat 1) ist.

Folie 8



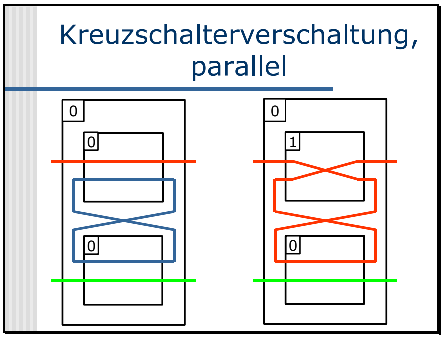
Folie 9



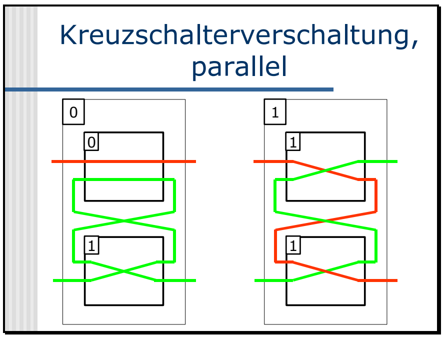
Man kann zwei Kreuzschalter hintereinander *und* parallel schalten. Von den vier Eingängen bleiben zwei die Eingänge des umfassenden Schalters, genau so passiert es mit den vier Ausgängen. Es bleiben jeweils zwei Eingänge und zwei Ausgänge intern. Bei der Hintereinanderschaltung gehen die beiden Eingänge des umfassenden Schalters zu den beiden Eingängen ein und demselben inneren Schalters. Entsprechend ist es mit den beiden Ausgängen des Umfassenden Schalters: sie kommen beide von ein und demselben inneren Schalter.

Bei der Parallelschaltung gehen die beiden Eingänge zu verschiedenen internen Schaltern. Die beiden internen Ausgänge werden zu internen Eingängen des jeweils anderen Schalters geführt.

Folie 10

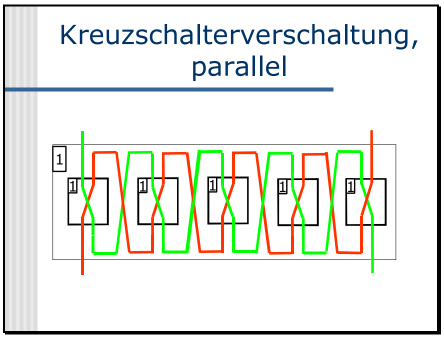


Folie 11



Außer der Hintereinanderschaltung (s.o.) und der Parallelschaltung (hier) gibt es keine wesentliche weitere Verschaltung zweier Kreuzschalter.

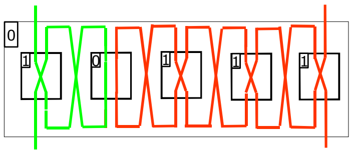
Folie 12



Analog zur Treppenhausschaltung kann man auch viele Kreuzschalter parallel schalten - aus Platzgründen habe ich die Schalter nun um 90° gedreht.

Folie 13

Kreuzschalterverschaltung, parallel



Das Resultat ist dann und nur dann 1 wenn alle Kreuzschalter auf 1 stehen

Folie 14

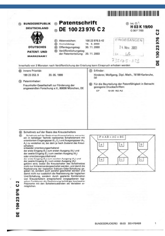
Kreuzschalterverschaltung

Wie kann es sein, dass die Parallelschaltung bislang nicht bekannt war?

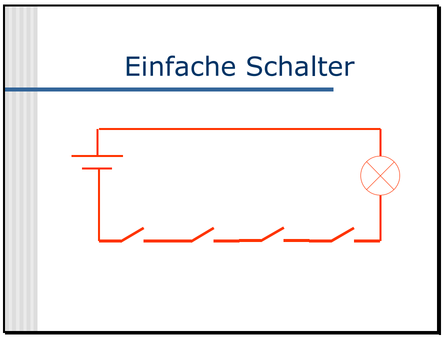
Im Rest des Vortrags geht es um diese Parallelschaltung und die Folgerungen daraus.

Folie 15

Das führte zu einem Patent



Folie 16



Bei der Hintereinanderschaltung einfacher Schalter brennt nämlich ein Lämpchen genau dann wenn alle Schalter "an" sind.

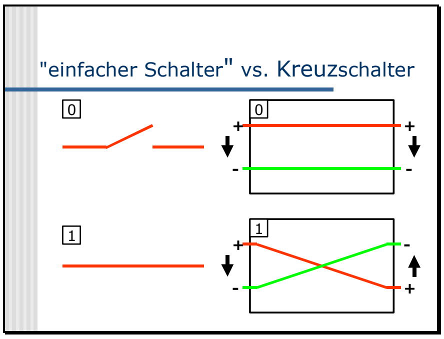
Folie 17

"einfacher Schalter" vs. Kreuzschalter

- Beim "einfachen" Schalter und generell in der Computertechnik bedeutet "0" dass kein Strom oder kein Potential da ist, "1" bedeutet dass Strom bzw. Potential da ist.
- Beim *Kreuzschalter* tritt an die Stelle des Potentials die Potential*orientierung*: "0" bedeutet "keine Potentialumkehr" und "1" bedeutet "Potentialumkehr".

siehe nächstes Bild

Folie 18



Beim "einfachen" Schalter und überhaupt generell in der Computertechnik bedeutet "0" dass kein Strom oder kein Potential da ist, "1" bedeutet dass Strom bzw. Potential da ist.

Beim Kreuzschalter tritt an die Stelle des Potentials die Potential*orientierung*: "0" bedeutet "keine Potentialumkehr" und "1" bedeutet "Potentialumkehr".

Folie 19

Kreuzschalterverschaltung

Wiederholung?

Folie 20

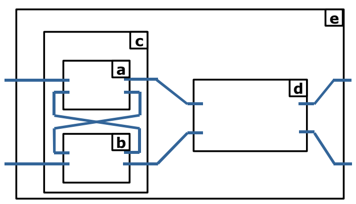
Erstes Resultat

- Die Hintereinanderschaltung von Kreuzschaltern bedeutet das **XOR**
- Die Parallelschaltung von Kreuzschaltern bedeutet das **AND**
- Man kann beide Verschaltungsarten mischen und erhält immer erneut als Gesamtergebnis einen Kreuzschalter

anstatt XOR wird oft auch EXOR geschrieben, beides bedeutet das Gleiche

Folie 21

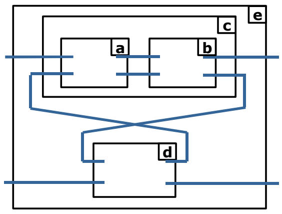
Kreuzschalterverschaltung



Beispiel: Zwei Kreuzschalter a, b parallel geschaltet (c), und dahinter, in Reihe, ein weiterer Kreuzschalter (d), ergibt den Kreuzschalter e

Folie 22

Kreuzschalterverschaltung



anderes Beispiel: Zwei Kreuzschalter a, b hintereinander geschaltet (c), und dazu parallel ein weiterer Kreuzschalter (d), ergibt den Kreuzschalter e

Folie 23

boolesche Algebra

In der booleschen Algebra sind die elementaren Operationen

AND (∧), OR (∨) und NOT (¬)

Nach dem "Rechnen" mit Bildern wollen wir nun das Entsprechende mit logischen Ausdrücken tun

Folie 24

boolescher Ring

Wem die boolesche Algebra geläufig ist, ist trotzdem vielleicht das Konzept des booleschen Rings bislang nicht begegnet

Folie 25

(mathematischer) Ring

In einem mathematischen Ring geht das Rechnen im Prinzip wie beim Rechnen mit ganzen Zahlen:

- Es gibt Addition "+" und Multiplikation "·"
- Es gibt eine 0 mit $a+0=a$ für jedes a
- Es gibt eine 1 mit $a \cdot 1=a$ für jedes a
- Und: man kann Polynome bilden mit Variablen x, y, ... : $x^2 + 2xy + y^2$ ...

An der Flipchart erläutern?

Folie 26

boolescher Ring

Im booleschen Ring gilt, was das Rechnen hier besonders einfach macht, zusätzlich:

- $a \cdot a=a$ für jedes a
- $a+a=0$ für jedes a

Das Rechnen im booleschen Ring ist völlig äquivalent zum Rechnen in der booleschen Algebra. Es gilt die folgende "Umrechnungstabelle":

Im Prinzip braucht man hier nur Ersteres fest legen: $a \cdot a=a$, das $2a=0$ folgt dann, wie ich hier mal kurz zeigen will:

$(a+1)(a+1) = a+1$ einerseits

$(a+1)(a+1) = a^2 + 2a +1$ andererseits

also: $2a = 0$

Folie 27

"Umrechnungstabelle"

Tabelle der Booleschen Polynome der Ordnung 2

Boolesche Algebra	Boolescher Ring
false	0
true	1
a	a
b	b
$a \wedge b$ (AND)	$a \cdot b$
$\neg a$	$1 + a$
$\neg b$	$1 + b$
$\neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$ (NAND, Sheffer)	$1 + a \cdot b$
$\neg(a \equiv b) = (a \wedge \neg b) \vee (\neg a \wedge b)$ (XOR)	$a + b$
$\neg(a \Rightarrow b) = a \wedge \neg b$	$a + a \cdot b$
$\neg(b \Rightarrow a) = \neg a \vee b$	$b + a \cdot b$
$a \equiv b = (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg b)$ (XNOR)	$1 + a + b$
$a \Rightarrow b = \neg a \vee b$ (Implikation)	$1 + a + a \cdot b$
$b \Rightarrow a = a \vee \neg b$ (Implikation)	$1 + b + a \cdot b$
$a \vee b$ (OR)	$a + b + a \cdot b$
$\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b$ (NOR, Peirce)	$1 + a + b + a \cdot b$

Verteilen! - Jetzt sind wir nahe am ersten "Gipfel"

Folie 28

boolescher Ring

- Die Addition im booleschen Ring, a+b, bedeutet das **XOR**
- Die Multiplikation im booleschen Ring, a·b, bedeutet das **AND**
- Damit wird der gesamte Rechenumfang im booleschen Ring genau so abgedeckt wie in der booleschen Algebra

Folie 29

boolescher Polynomring (BPR)

Im BPR kann man Variable x, y, ... über Addition und Multiplikation zu Polynomen verknüpfen, wobei aber keine höheren Potenzen x^2, y^3, ... vorkommen und auch nur ganze Zahlen 0 und 1.

Am Flipchart erläutern? Es wird bald erläutert werden!

Folie 30

Ein bisschen rechnen mit booleschen Polynomen...

Modus ponens:
Wenn es regnet, ist die Straße nass.
Es regnet.
⇒ Die Straße ist nass

Nach unserer Tabelle wird a => b im BPR 1 + a + ab geschrieben

Folie 31

Ein bisschen rechnen mit booleschen Polynomen...

(1 + a + ab)a = a + a + ab = ab
also ist das Resultat nicht b, wie vielleicht erwartet, sondern a AND b

also: die Straße ist nass *und* es regnet

- ist ja auch klar: wenn es regnet, ist die Straße nass *und* es regnet. **Weiteres Rechnen?**

Am Schluss, wenn es beliebt, mehr Rechnen

Folie 32

Ein bisschen rechnen mit booleschen Polynomen...

Gegeben sei der logische Ausdruck:

((a AND x) XOR NOT(b⇒x)) AND (a ≡ b)

Nach unserer Tabelle heißt das:

(ax + (b + xb))(a + b + 1)

ein rein formales Beispiel anhand unserer Tabelle, am Flipchart vorrechnen!

Folie 33

Ein bisschen rechnen mit booleschen Polynomen...

Resultat:

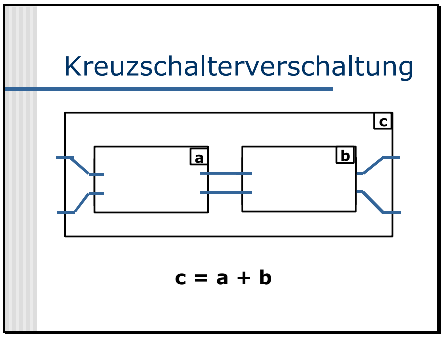
ab

Insbesondere hängt das Resultat also nicht von x ab

Folie 34

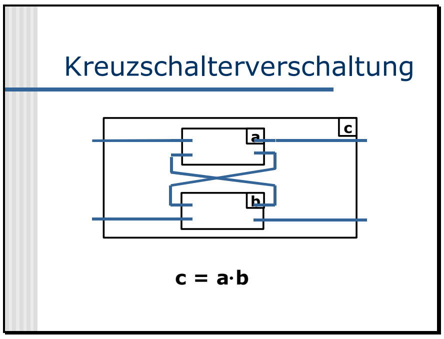
Ich wiederhole die Kombination von Kreuzschaltern nochmal, wobei ich die booleschen Polynome gleich dran schreibe!

Folie 35



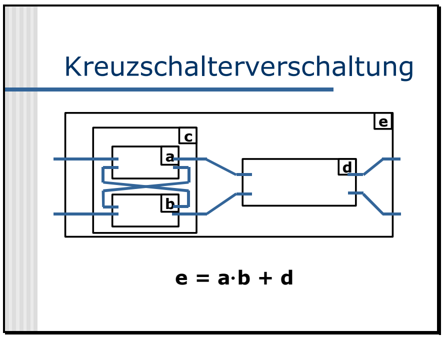
Jeder Kreuzschalter ist ein boolesches Polynom und jedes boolesche Polynom, dessen Variable Kreuzschalter sind, ist wieder ein Kreuzschalter

Folie 36



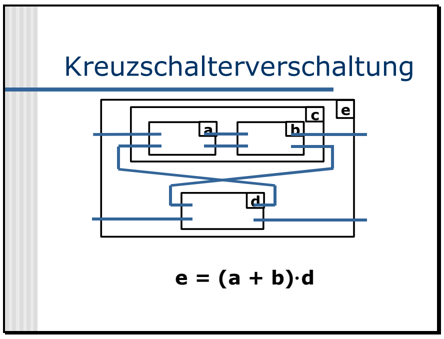
Diese Bilder hatten wir schon: Jetzt steht auch noch der zugehörige mathematische Ausdruck dabei.

Folie 37



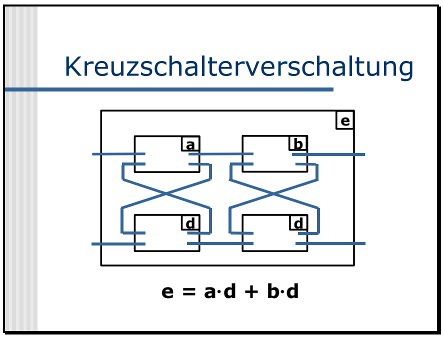
Jeder Kreuzschalter ist ein boolesches Polynom und jedes boolesche Polynom, dessen Variable Kreuzschalter sind, ist wieder ein Kreuzschalter

Folie 38



Nun gilt ja im BPR das Distributivgesetz, also gilt auch e = ad + bd ... Das folgende Schema ist also äquivalent.

Folie 39



Neu ist hier, dass d zweimal auftritt ...

Folie 40

Reentrantfähigkeit

Die Möglichkeit der Mehrfachnutzung einer Ressource nennt man Rentrantfähigkeit.

Die Oberleitung einer Straßenbahn ist reentrantfähig, die Straßenbahn selber ist es nicht: sie kann zu einem Zeitpunkt nur entweder hier oder dort fahren.

Folie 41

Reentrantfähigkeit

Kreuzschalter, durch die z.B. Strom fließt, sind nicht ohne weiteres reentrantfähig.

Wenn sonstwas durch einen Kreuzschalter fließen würde, könnte das anders sein...

... wenn sonstwas durch einen Kreuzschalter fließen würde, könnte das anders sein.

Folie 42

Reentrantfähigkeit

Für Kreuzschalternetze, wie auch immer realisiert

- elektrisch, optisch, mechanisch, hydraulisch, molekular, atomar, subatomar oder sonst irgendwie, wo es eine Orientierung und eine Orientierungsumkehr gibt -

muss letztlich *vielhundertfache* Reentrantfähigkeit gegeben sein

Folie 43

Reentrantfähigkeit

Eine konkrete Technologie hierfür gibt es noch nicht.

Eine Lösung könnte z.B. in der Hochfrequenztechnologie liegen: Auf eine Trägerfrequenz wird eine niedrigere Frequenz aufmoduliert, wobei dieses modulierte Signal wieder Träger neuer Modulationen wird etc..

Ich fragte einmal Prof. Lipp hier in Karlsruhe: Solch ein Aufmodulieren könnte mit heutiger Technologie vielleicht 2 oder 3 Mal klappen.

Folie 44

Reentrantfähigkeit

Ein Bild, das viele vielleicht kennen, symbolisiert das:

Das rekursive Aufmodulieren von Symbolen

Aus D.R. Hofstadter: "Gödel, Escher, Bach" (70er Jahre).
- Man denke auch an die Glühfaden-Wendel klassischer Glühlampen

Folie 45

Reentrantfähigkeit

Einmal angenommen, die Reentrantfähigkeit der Kreuzschalter sei gegeben.

Den Berechnungsprozess möchte ich dann mit der Eisenbahn-Metapher beschreiben:

Ein Schienennetz sei entsprechend einem BPR-Polynom aufgebaut. Die Variablen des Polynoms seien also als Doppelkreuzungsweichen realisiert.

Die Beispiele folgen bald!

Folie 46

Reentrantfähigkeit

Ein Signal sei nun ein automatisches Fahrzeug, das sich auf Schienen durch das Netz bewegt. Es passiert die (elementaren) Doppelkreuzungsweichen, aber auch, wie gezeigt, nicht elementare Kreuzschalter.

Am Eingang jedes Kreuzschalters erhält das Fahrzeug ein Ticket mit dem Namen des gerade betretenen Kreuzschalters.

Folie 47

Reentrantfähigkeit

Dieses Ticket wird oben auf einen im Fahrzeug angelegten Stapel drauf gelegt (push). Auf seinem Weg im Innern des Kreuzschalters kann das Fahrzeug zu weiteren Schaltern gelangen, deren Ticket wieder "gepusht" wird.

Folie 48

Reentrantfähigkeit

Beim Verlassen eines Kreuzschalters bestehen i.a. mehrere mit "Wegweisern" versehene Weiterfahr-Möglichkeiten. Es geschieht Folgendes:

- Das oberste Ticket wird abgegeben (pop).
- Es wird der Weg gewählt, der zum Namen des nun obersten Tickets gehört

Das soll nun verdeutlicht werden

Folie 49

Konkrete Anwendung: Rechnen mit Binärzahlen

zwei Zahlen

$A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0$ und

$B_{n-1}, B_{n-2}, \ldots, B_0$

Wie sieht die Summe und das Produkt aus?

Ich habe das mal ausgerechnet:

Folie 50

Konkrete Anwendung: Rechnen mit Binärzahlen

$$ADD_0 = A_0 + B_0$$

$$ADD_1 = A_1 + B_1 + A_0 B_0$$

$$ADD_2 = A_2 + B_2 + A_1 B_1 + A_1 A_0 B_0 + A_0 B_1 B_0$$

$$ADD_3 = A_3 + B_3 + A_2 B_2 + A_2 A_1 B_1 + A_1 B_2 B_1 + A_2 A_1 A_0 B_0 + A_1 A_0 B_2 B_0 + A_2 A_0 B_1 B_0 + A_0 B_2 B_1 B_0$$

$$ADD_4 = A_4 + B_4 + A_3 B_3 + A_3 A_2 B_2 + A_2 B_3 B_2 + A_3 A_2 A_1 B_1 + A_2 A_1 B_3 B_1 + A_3 A_1 B_2 B_1 + A_1 B_3 B_2 B_1 + A_3 A_2 A_1 A_0 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_3 B_0 + A_3 A_1 A_0 B_2 B_0 + A_1 A_0 B_3 B_2 B_0 + A_3 A_2 A_0 B_1 B_0 + A_2 A_0 B_3 B_1 B_0 + A_3 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_0 B_3 B_2 B_1 B_0$$

$$ADD_5 = A_5 + B_5 + A_4 B_4 + A_4 A_3 B_3 + A_3 B_4 B_3 + A_4 A_3 A_2 B_2 + A_3 A_2 B_4 B_2 + A_4 A_2 B_3 B_2 + A_2 B_4 B_3 B_2 + A_4 A_3 A_2 A_1 B_1 + A_3 A_2 A_1 B_4 B_1 + A_4 A_2 A_1 B_3 B_1 + A_2 A_1 B_4 B_3 B_1 + A_4 A_3 A_1 B_2 B_1 + A_3 A_1 B_4 B_2 B_1 + A_4 A_1 B_3 B_2 B_1 + A_1 B_4 B_3 B_2 B_1 + A_4 A_3 A_2 A_1 A_0 B_0 + A_3 A_2 A_1 A_0 B_4 B_0 + A_4 A_2 A_1 A_0 B_3 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_4 B_3 B_0 + A_4 A_3 A_1 A_0 B_2 B_0 + A_3 A_1 A_0 B_4 B_2 B_0 + A_4 A_1 A_0 B_3 B_2 B_0 + A_1 A_0 B_4 B_3 B_2 B_0 + A_4 A_3 A_2 A_0 B_1 B_0 + A_3 A_2 A_0 B_4 B_1 B_0 + A_4 A_2 A_0 B_3 B_1 B_0 + A_2 A_0 B_4 B_3 B_1 B_0 + A_4 A_3 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_3 A_0 B_4 B_2 B_1 B_0 + A_4 A_0 B_3 B_2 B_1 B_0 + A_0 B_4 B_3 B_2 B_1 B_0$$

Die ersten Polynome der Addition

ADD_0, ADD_1, ... sind die booleschen Polynome für die entsprechende Binärstelle des Resultats

Folie 51

Konkrete Anwendung: Rechnen mit Binärzahlen

$$MLT_0 = A_0 B_0$$

$$MLT_1 = A_0 B_1 + A_1 B_0$$

$$MLT_2 = A_0 B_2 + A_1 B_1 + A_2 B_0 + A_1 A_0 B_1 B_0$$

$$MLT_3 = A_0 B_3 + A_1 B_2 + A_2 B_1 + A_1 A_0 B_2 B_1 + A_3 B_0 + A_2 A_0 B_2 B_0 + A_2 A_1 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_1 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_2 B_1 B_0$$

$$MLT_4 = A_0 B_4 + A_1 B_3 + A_2 B_2 + A_1 A_0 B_3 B_2 + A_3 B_1 + A_2 A_0 B_3 B_1 + A_2 A_1 B_2 B_1 + A_1 A_0 B_2 B_1 + A_2 A_1 A_0 B_2 B_1 + A_1 A_0 B_3 B_2 B_1 + A_4 B_0 + A_3 A_0 B_3 B_0 + A_3 A_1 B_2 B_0 + A_3 A_2 A_0 B_2 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_2 B_0 + A_2 A_0 B_3 B_2 B_0 + A_3 A_2 B_1 B_0 + A_2 A_1 B_1 B_0 + A_3 A_2 A_1 B_1 B_0 + A_3 A_1 A_0 B_1 B_0 + A_3 A_2 A_1 A_0 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_3 B_1 B_0 + A_2 A_1 B_2 B_1 B_0 + A_2 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_3 B_2 B_1 B_0$$

$$MLT_5 = A_0 B_5 + A_1 B_4 + A_2 B_3 + A_1 A_0 B_4 B_3 + A_3 B_2 + A_2 A_0 B_4 B_2 + A_2 A_1 B_3 B_2 + A_1 A_0 B_3 B_2 + A_2 A_1 A_0 B_3 B_2 + A_1 A_0 B_4 B_3 B_2 + A_4 B_1 + A_3 A_0 B_4 B_1 + A_3 A_1 B_3 B_1 + A_3 A_2 A_0 B_3 B_1 + A_2 A_1 A_0 B_3 B_1 + A_2 A_0 B_4 B_3 B_1 + A_3 A_2 B_2 B_1 + A_2 A_1 B_2 B_1 + A_3 A_2 A_1 B_2 B_1 + A_3 A_1 A_0 B_2 B_1 + A_3 A_2 A_1 A_0 B_2 B_1 + A_1 A_0 B_4 B_2 B_1 + A_2 A_1 B_3 B_2 B_1 + A_2 A_0 B_3 B_2 B_1 + A_2 A_1 A_0 B_3 B_2 B_1 + A_1 A_0 B_4 B_3 B_2 B_1 + A_5 B_0 + A_4 A_0 B_4 B_0 + A_4 A_1 B_3 B_0 + A_4 A_3 A_0 B_3 B_0 + A_3 A_1 A_0 B_3 B_0 + A_3 A_0 B_4 B_3 B_0 + A_4 A_2 B_2 B_0 + A_4 A_3 A_1 B_2 B_0 + A_3 A_2 A_1 B_2 B_0 + A_3 A_2 A_0 B_2 B_0 + A_4 A_3 A_2 A_0 B_2 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_2 B_0 + A_4 A_2 A_1 A_0 B_2 B_0 + A_3 A_2 A_0 B_4 B_2 B_0 + A_3 A_1 A_0 B_4 B_2 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_4 B_2 B_0 + A_3 A_1 B_3 B_2 B_0 + A_2 A_0 B_3 B_2 B_0 + A_4 A_2 A_0 B_3 B_2 B_0 + A_3 A_2 A_0 B_3 B_2 B_0 + A_4 A_1 A_0 B_3 B_2 B_0 + A_2 A_0 B_4 B_3 B_2 B_0 + A_4 A_3 B_1 B_0 + A_3 A_2 B_1 B_0 + A_4 A_3 A_2 B_1 B_0 + A_4 A_2 A_1 B_1 B_0 + A_4 A_3 A_2 A_1 B_1 B_0 + A_3 A_1 A_0 B_1 B_0 + A_4 A_3 A_1 A_0 B_1 B_0 + A_3 A_2 A_1 A_0 B_1 B_0 + A_4 A_3 A_2 A_1 A_0 B_1 B_0 + A_3 A_2 A_0 B_4 B_1 B_0 + A_3 A_1 A_0 B_4 B_1 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_4 B_1 B_0 + A_2 A_1 B_3 B_1 B_0 + A_3 A_0 B_3 B_1 B_0 + A_4 A_2 A_0 B_3 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_3 B_1 B_0 + A_4 A_1 A_0 B_3 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_4 B_3 B_1 B_0 + A_3 A_2 B_2 B_1 B_0 + A_3 A_1 B_2 B_1 B_0 + A_3 A_2 A_1 B_2 B_1 B_0 + A_2 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_4 A_2 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_4 A_1 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_3 A_2 A_1 A_0 B_2 B_1 B_0 + A_2 A_0 B_4 B_2 B_1 B_0 + A_2 A_1 B_3 B_2 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_3 B_2 B_1 B_0 + A_2 A_1 A_0 B_3 B_2 B_1 B_0 + A_1 A_0 B_4 B_3 B_2 B_1 B_0$$

Die ersten Polynome der Multiplikation

Ebenso MLT_0, MLT_1, ...

Folie 52

Konkrete Anwendung: Rechnen mit Binärzahlen

Für die Addition ist das Bildungsgesetz einigermaßen durchsichtig, es lässt sich auch in rekursiver Form schreiben:

$ADD_i = A_i + B_i + U_i$ mit

- $U_0 = 0$
- $U_j = A_{j-1}\, B_{j-1} + U_{j-1}(A_{j-1} + B_{j-1})$ (j = 1, 2, …)

Ein ähnlich einfaches Bildungsgesetz für die $MULT_i$ ist mir bis jetzt leider nicht bekannt.

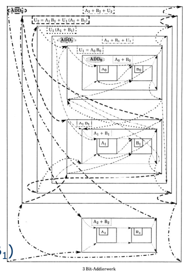
Folie 53

3 Bit-Addierwerk

$ADD_i = A_i + B_i + U_i$ mit

- $U_0 = 0$
- $U_j = A_{j-1}\, B_{j-1} + U_{j-1}(A_{j-1} + B_{j-1})$ (j = 1, 2, …)

- $ADD_0 = A_0 + B_0$
- $ADD_1 = A_1 + B_1 + U_1$
- $U1 = A_0B_0$
- $ADD_2 = A_2 + B_2 + U_2$
- $U_2 = A_2 + B_2 + U_1(A_1 + B_1)$



Dazu stelle ich mal die Formel und das Netz nebeneinander:

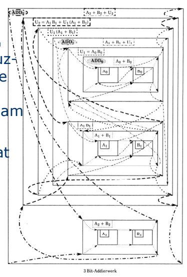
Die Grafik ist etwas heikel: Ich hatte sie Ende der 80er Jahre auf der ersten Grafik-Workstation erzeugt, die es gab: Auf dem Xerox Star. Die Frage war: Wie stelle ich denn die konkreten Polynomausdrücke als konkrete Kreuzschalternetze dar?

Folie 54

3 Bit-Addierwerk

Die nicht elementaren Kreuzschalter sind Rechtecke, die den Ausdruck, den sie darstellen, in einem Kästchen am oberen Rand enthalten.

Der Rand des Kästchens hat eine Strichelung, die als Verbindung im Innern (das "Ticket") wiederkehrt.



Folie 55

Konkrete Anwendung: Vergleich zweier Binärzahlen

Ein anderes Beispiel ist die Funktion "$>_n$" , die für zwei maximal n-stellige Binärzahlen das Resultat 1 liefert falls A > B, andernfalls 0.

Analog die Funktion "$\geq_n$". Sei F entweder die Funktion ">" oder die Funktion "≥". Dann kann F_n durch eine gemeinsame Rekursionsformel definiert werden:

eine weitere konkrete Anwendung

Folie 56

Konkrete Anwendung: Vergleich zweier Binärzahlen

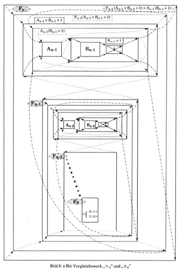
- $F_i = F_{i-1}(A_{i-1} + B_{i-1} + 1) + A_{i-1}(B_{i-1} + 1)$ für i = 1, 2,...
- F_0 =
  - 0 für F = ">"
  - 1 für F = "≥"

Beide Rekursionsformeln, für die Addition von Zahlen und für den Vergleich von Zahlen, führen zu Kreuzschalternetzen, an denen ich die Konstruktion erläutern kann (evtl. nochmal zurück gehen zu Folie 53)

Folie 57

n Bit-Vergleichswerk

- $F_i = F_{i-1}(A_{i-1} + B_{i-1} + 1) + A_{i-1}(B_{i-1} + 1)$ für i = 1, 2,...
- F_0 =
  - 0 für F = ">"
  - 1 für F = "≥"



Hier muss ich genau drauf eingehen!

Folie 58

n Bit-Vergleichswerk

Jetzt kommt die Hardware

Präsentation des Vergleichers

Folie 59

Das übergeordnete Rechenwerk

Auch kompliziertestete Berechnungen könnten so in einem Schritt erledigt werden. Der Ablauf wäre:

("Laden der Verdratung" (Unbestimmteneinstellung, "Schuss", Synchronisation)*)*

Die Computerarchitektur wäre also eine völlig andere als die heute übliche. Die "Verdrahtung" müsste variabel sein. Ihre Einstellung wäre die eigentliche Rechenarbeit, während die Wertermittlung dann ja in einem einzigen Schritt geschieht.

Folie 60

Logeleien

- ein boolescher Tischrechner von 1986
- ein Spektrum-Artikel von 2009:
  Martin Kreuzer, Stefan Kühling: "Alles logisch, oder was?"

abschließende Worte